

СМБ – Секция “Изток”
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 20.04.2019 г.
11 клас и 12 клас

Времето за решаване е 120 минути.
Организаторите Ви пожелават успех !

Име.....училище.....град.....

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор” се приема за решение само, ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

1. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 - 2x - 5 = 0$, то сборът $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ е равен на:

- а) $\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}$ б) $\frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$ в) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ г) друг отговор

2. Сборът на две числа е 24, а разликата от вторите им степени е 48. Разликата на дадените числа е равна на:

- а) 2 б) 11 в) 13 г) друг отговор

3. Числата $3x + 5$, $x + 25$ и $20 - 2x$ са последователни членове на аритметична прогресия. Разликата на прогресията е равна на:

- а) -70 б) -25 в) 70 г) друг отговор

4. Всички допустими стойности на израза $\frac{\sqrt[3]{x-5}}{1-\lg(5-x)}$ са:

- а) $x \in \emptyset$ б) $x \neq 5$ в) $x < 5$ г) друг отговор

5. Кое от числата **НЕ** може да бъде вероятност на случайно събитие?

- а) $\operatorname{tg}30^\circ$ б) $\cos120^\circ$ в) $\sin180^\circ$ г) $\cos90^\circ$

6. Намерете най-голямата страна на триъгълник, ако тя е равна на радиуса на описаната окръжност, а другите две страни са a и $a\sqrt{3}$.

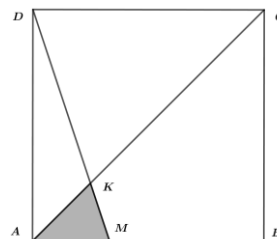
- а) $a\sqrt{5}$ б) $a\sqrt{6}$ в) $a\sqrt{7}$ г) друг отговор

7. Кой от изразите е тъждествен на $8^{\log_2 x}$ при $x > 0$:

- а) $3x$ б) $3 + x$
в) x^3 г) друг отговор

8. Точка M лежи на страната AB на квадрата $ABCD$ така, че $AM:MB = 1:2$. $AC \cap MD = K$. Ако лицето на $\triangle AKM$ е 4 cm^2 , то лицето на $ABCD$ е:

- а) 36 cm^2 б) 72 cm^2
в) 96 cm^2 г) друг отговор



9. Заплатата на началникът на една фирма е 2100 лв., а двамата му заместника вземат средно по 1600 лв. Във фирмата работят 5 специалисти със средна заплата 1200 лв. и 12 работника, които получават по 800 лв. Средната заплата във фирмата е равна на:

- а) 1025 лв. б) 1045 лв. в) 1425 лв. г) друг отговор

10. Стойностите на реалното число k , за които уравнението $\sqrt{(x-1)(2019-x)} = k$ има единствен реален корен са:

- а) $k = 1010$ б) $k = 1009$ в) $k = \sqrt{2019}$ г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише. Задачите се оценяват с по 5 точки.

11. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност така, че дъгите $AB:BC:CD:DA=3:4:2:3$. Ако радиусът на окръжността е 2, то лицето на $ABCD$ е равно на:

Отговор

12. Стойността на изразът $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha}$ при $\alpha = 15^\circ$ е равна на:

Отговор

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите две задачи трябва да се напише подробно решението. Задачите се оценяват с по 10 точки.

13. Три числа със сбор 30 са последователни членове на аритметична прогресия. Ако към първото число прибавим 3, а към третото 2, трите числа ще бъдат последователни членове на геометрична прогресия. Намерете началните числа.

14. Окръжност k се допира до основата AB на равнобедрен $\triangle ABC$ в точка A , минава през върха C и пресича бедрото BC в точка M така, че $CM:MB = 3:1$. Ако $AM = 4$, намерете страните на $\triangle ABC$ и радиуса на окръжността k .

Първа част

1	2	3	4	5
$\Gamma(-\frac{2}{5})$ или $(-0,4)$	А	В	Γ $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; 5)$	Б
6	7	8	9	10
В	В	В	Б	Б

Втора част

11. $4 + 2\sqrt{3}$

12. $2\sqrt{2}$

Трета част

13 зад.

Нека числата са $a, a + d, a + 2d$

1 точка

Геометричната прогресия е $a + 3, a + d, a + 2d + 2$

1 точка

Съставяне системата $\begin{cases} a + a + d + a + 2d = 30 \\ (a + d)^2 = (a + 3)(a + 2d + 2) \end{cases}$ **2 точки** (по 1 точка за уравнение)

Решаване на системата

2 точки

Получаваме $\begin{cases} a = 2 \\ d = 8 \end{cases}$ и $\begin{cases} a = 17 \\ d = -7 \end{cases}$

2 точки (по 1 точка за решение)

Началните числа са 2, 10, 18 или 17, 10, 3

2 точки (по 1 точка за случай)

14 зад.

Нека $MB = x, MC = 3x$

От свойството на допирателната $BA^2 = BM \cdot BC = x \cdot 4x \Rightarrow AB = 2x$

$\square BAM = \square ACB = \frac{AM}{2}, \Rightarrow \triangle ABC \square \triangle BAM$

$\Rightarrow \triangle BAM$ е равнобедрен и $AB = AM = 2x = 4, x = 2$

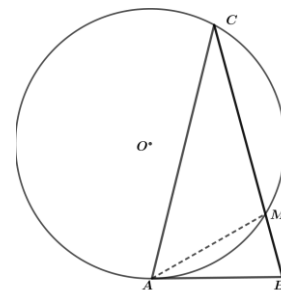
Бедрата са $4x = 8$

По херонова формула $S_{AMC} = 4\sqrt{15}$

$$S_{AMC} = \frac{AM \cdot AC \cdot CM}{4R}$$

$$R = \frac{16}{\sqrt{15}}$$

Радиусът може да се намери и по синусова теорема за AMC , като се намерят тригонометричните функции на ACM



Оценяване:

Изразяване на AB **2 точки**

Доказване $AM = AB$ **1 точка**

Намиране на бедрата **2 точки**

Намиране на радиуса **5 точки**

Забележка:

Всеки друг вариант за решение може да се оценява по избран от проверяващите начин.