**1. клас**

**7. Отг. 11.** Тъй като на втората спирка са се качили 3 зайчета, но са слезли 5 зайчета, броят на зайчетата в автобуса се е намалил с 5 – 3 = 2 зайчета. Следователно броят на зайчетата в автобуса е станал 15 – 2 = 13. По условие толкова е станал и броят на катеричките. Но на втората спирка са се качили 7 катерички и са слезли 5, т.е. броят на катеричките се е увеличил с 7 – 5 = 2. Заключаваме, че преди да станат 13 катеричките са били 13 – 2 = 11, което е отговорът на задачата.

*Оценяване*. За определяне броя 13 на зайчетата в автобуса след промените на втората спирка се присъждат **4 точки**. За отбелязване на факта, че катеричките са станали 13 след промените на втората спирка, се присъжда **1 точка**. Определянето на първоначални брой 11 на катеричките се оценява с **5 точки**.

| Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 | Задача 4 | Задача 5 | Задача 6 | Задача 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **B** | **E** | **C** | **A** | **B** | **19** | **11** |

**2. клас**

**7. Отг. 3.** Задачата може да се реши с метода на изчерпването:

| квадрати | | брой оставащи върхове | проверка дали числото е от таблицата за умножение по 3 | брой триъгълници |
|---|---|---|---|---|
| брой | брой върхове | | | |
| 3 | 12 | 29 – 12 = 17 | 17 не е от таблицата | няма решение |
| 4 | 16 | 29 – 16 = 13 | 13 не е от таблицата | няма решение |
| **5** | **20** | **29 – 20 = 9** | **9 е от таблицата** | **9 : 3 = 3** |
| 6 | 24 | 29 – 24 = 5 | 5 не е от таблицата | няма решение |
| 7 | 28 | 29 – 28 = 1 | числото е по-малко от 3 | няма решение |

Единствената възможност е триъгълниците да са 3, което е отговорът на задачата.

Да отбележим, че методът на изчерпването замества свеждането на решението до Диофантово уравнение. Нека бройките на дадените квадрати и триъгълници са съответно $a$ и $b$. От условието следва, че $4a+3b=29$, което е въпросното Диофантово уравнение. То се решава, като се дават поседователно стойности на $a$ и от уравнението се пресмятат съотетните стойности на $b$. Това са действията, отразени в таблицата по-горе.

*Оценяване*. Ако се следва горната схема на доказателство, независимо дали е с таблица или с Диофантово уравнение, всеки от петте случая се оценява с **2 точки** при направени верни заключения.

| Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 | Задача 4 | Задача 5 | Задача 6 | Задача 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **E** | **B** | **D** | **C** | **C** | **18** | **3** |

**3. клас**

**7. Отг. 712.** Тъй като номерирането на книгата започва от трета страница с цифрата 3, за страниците с едноцифрени номера са необходими 7 цифри. Двуцифрените числа са 90 и за тях са необходими 90.2 = 180 цифри. Тъй като 7 + 180 = 187, за трицифрените номера на книгата са използвани 2023 – 187 = 1836 цифри. Следователно трицифрените номера са 1836 : 3 = 612. Като вземем предвид, че първите две страници и последната не са номерирани, заключаваме, че книгата има общо 9 + 90 + 612 + 1 = 712 страници.

*Оценяване*. За намиране броя на страниците на книгата, които са номерирани с едноцифрени числа, се присъждат **2 точки**. За намиране броя на страниците, които са номерирани с двуцифрени числа, се присъжда **3 точки**. За намиране броя на страниците, които са номерирани с трицифрени числа, се присъждат **4 точки**. За пресмятане на крайния резултат се присъжда **1 точка**.

| Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 | Задача 4 | Задача 5 | Задача 6 | Задача 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **B** | **E** | **B** | **C** | **A** | **7** | **712** |

**4. клас**

**7. Отг. 5.** Тъй като $A + A$ завършва на $A$, единствената възможност е $A = 0$. Да разгледаме разряда на хилядите. Имаме $Н + Н = 2Н$, което е четно число, а цифрата $А$ е нула, която също е четно число. Заключаваме, че от разряда на стотиците няма пренос (ако има, то той е равен на 1 и сборът би станал нечетно число). Така получаваме, че $Н = 5$. От разряда на десетохилядите имаме $2К + 1 = 5$ и следователно $К = 2$.

По-нататък да отбележим, че за $Г$ има две възможности: $Г = 1$ и $Г = 6$. В първия случай от $И + И = У$ следва, че $И = 3$, $У = 6$ или $И = 4$, $У = 8$. Това е така, защото не може да има пренос от стотиците към хилядите и цифрите $И$ и $У$ трябва да са различни от вече използваните 0, 1, 2 и 5. Във втория случай $2И + 1 = У$, откъдето $И = 1$, $У = 3$ или $И = 3$, $У = 7$, или $И = 4$, $У = 9$, защото няма пренос от стотиците към хилядите и цифрите $И$ и $У$ трябва да са различни от 0, 2, 5 и 6. Окончателно решенията на ребуса са:

$$\begin{array}{r}25310\\+\ 25310\\\hline 50620\end{array}\qquad\begin{array}{r}25160\\+\ 25160\\\hline 50320\end{array}\qquad\begin{array}{r}25460\\+\ 25460\\\hline 50920\end{array}\qquad\begin{array}{r}25410\\+\ 25410\\\hline 50820\end{array}\qquad\begin{array}{r}25360\\+\ 25360\\\hline 50720\end{array}$$

Техният брой е 5, което е отговорът на задачата.

*Оценяване*. За намиране на $А = 0$ и $К = 2$ се присъжда по **1 точка**, а за намиране на $Н = 5$ се присъждат **3 точки**. Всяко вярно решение на ребуса се оценява с **1 точка**.

| Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 | Задача 4 | Задача 5 | Задача 6 | Задача 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **C** | **D** | **E** | **C** | **B** | **6** | **5** |

**5. клас**

**7. Отг. 4.** Тъй като $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, то отличните му делители са $2^2 \cdot 3 = 12$, $2 \cdot 3^2 = 18$, $2^2 \cdot 5 = 20$ и $3^2 \cdot 5 = 45$, т.е. общо 4 числа. Използвахме, че делителите на 12 са 1, 2, 3, 4, 6 и 12; делителите на 18 са 1, 2, 3, 6, 9 и 18; делителите на 20 са 1, 2, 4, 5, 10 и 20; а делителите на 45 са 1, 3, 5, 9, 15 и 45. Ще покажем, че това са всички отлични делители на 720. За целта ще използваме, че ако

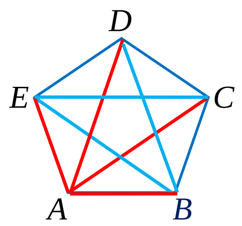
$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ е разлагането на естественото число $n$ на произведение от прости множители $p_1$, $p_2$, …, $p_s$ съответно с кратности $k_1$, $k_2$, …, $k_s$, то броят на делителите на $n$, включително и единицата, е $(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_s+1)$. Тъй като в разлагането на 720 на произведение от прости множители няма прост делител с кратност 5, а 6 = 2.3, то броят на отличните делители на 720 трябва да е произведение на 2 и 3. Следователно от простите делители на 720 трябва да се вземат два делителя, единият с кратност 1, а вторият с кратност 2. Възможните двойки са (2,3), (2,5) и (3,5), с помощта на които получаваме двойките $(2^2,3)$, $(2,3^2)$, $(2^2,5)$ и $(3^2,5)$.

*Оценяване*. По **2 точки** за намиране на всеки от отличните делители 12, 18, 20 и 45, както и **2 точки** за доказване, че това са всички.

| Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 | Задача 4 | Задача 5 | Задача 6 | Задача 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **B** | **B** | **C** | **D** | **D** | **2** | **4** |

**6. клас**

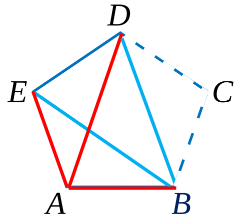
**7. Отг. 2.** Нека петоъгълникът е *ABCDE*.

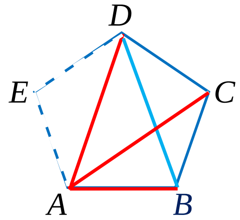



<u>*Случай* 1</u>. От върха *A* излизат 4 едноцветни отсечки, например червените *AE*, *AD*, *AC* и *AB*. Тогава *EB* трябва да е синя, за да не е едноцветен $\Delta ABE$. Аналогично *BC*, *BD*, *CD*, *DE* и *CE* трябва да са сини, за да не са едноцветни съответно $\Delta ABC$, $\Delta ABD$, $\Delta ACD$, $\Delta ADE$ и $\Delta ACE$. Но сега $\Delta BCD$, $\Delta BCE$ и $\Delta BDE$ са сини. Следователно този случай не води да резултат.

<u>*Случай* 2</u>. От върха *A* излизат 3 едноцветни отсечки, които нека отново да са червени.

<u>*Случай* 2.1</u>. Две от отсечките са страни. Нека *AE*, *AD* и *AB* са червени. Тогава *BE*, *BD* и *ED* трябва да са сини, за да са разноцветни $\Delta ABE$, $\Delta ABD$ и $\Delta ADE$. Но сега $\Delta EBD$ е син и следователно този случай не води до резултат.



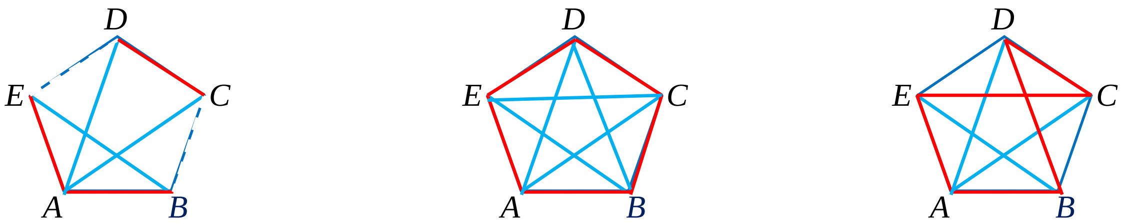
*Случай 2.2*. Две от отсечките са диагонали. Нека *AD, AC* и *AB* са червени. Тогава *BD, BC* и *CD* трябва да са сини, за да са разноцветни $\Delta ABD$, $\Delta ABC$ и $\Delta ACD$. Но сега $\Delta BCD$ е син и следователно този случай също не води до резултат.

*Случай 3*. От върха *A* излизат 2 едноцветни отсечки, които без ограничение предполагаме, че са червени. Другите две, които излизат от *A*, трябва да са сини, защото ако не са, попадаме в някой от предните случаи.

*Случай 3.1*. Двете избрани отсечки са страни. Нека *AE* и *AB* са червени, а *AC* и *AD* са сини. Тогава *EB* трябва да е синя, а *CD* трябва да е червена, за да са разноцветни $\Delta EAB$ и $\Delta ACD$. По-нататък трябва да се разгледат различните варианти за двойките *BC, BD* и *CE, CB*. Отсечките във всяка двойка трябва да са разноцветни. Нека например *BC* е червена, а *BD* и *CE* са сини. Сега *ED* трябва да е червена, за да е разноцветен $\Delta EBD$. Получаваме, че всички триъгълници са разноцветни. При втората възможност, когато *BC* е синя, а *BD* и *CE* са червени, *ED* трябва да е синя, за да е разноцветен $\Delta ECD$. Отново получаваме, че всички триъгълници са разноцветни.

*Случай 3.2*. Двете избрани отсечки са диагонали. Разглежданията са аналогични на тези в Случай 3.1.

Заключаваме, че Случай 3. води до резултат. Следователно отговорът на задачата е 2.




*Оценяване*. Случай 1 се оценява с **1 точка**, а случаите 2.1. и 2.2. се оценяват с по **2 точки**. Случай 3 се оценява с **5 точки**, ако подробно и вярно е разгледан поне един от случаите 3.1. и 3.2. и е получен верният отговор.

| Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 | Задача 4 | Задача 5 | Задача 6 | Задача 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **C** | **B** | **E** | **B** | **C** | **20** | **2** |

**7-8. клас**

**7. Отг. 685 440.** Едно число се дели на 9, ако сумата от цифрите му се дели на 9. Сборът на всички цифри е 45. Следователно в деветцифрените числа с различни цифри липсва или 9, или 0. Броят на числата, в които не участва цифрата 0 е 9!, а тези, в които не участва цифрата 9, са 8.8!. Търсеният брой е $9!+8.8!=17.8!=17.40320=685440$.

*Оценяване*. Съображението, че числата трябва да се разделят на 2 групи, като в едната са тези, които не съдържат 0, а във втората са тези, които не съдържат 9, се оценява с **3 точки**. Намиране броя на числата във всяка група се оценява с по **3 точки**. За намиране на верния отговор се присъжда **1 точка**.

| Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 | Задача 4 | Задача 5 | Задача 6 | Задача 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **E** | **B** | **C** | **D** | **C** | **13 881** | **685 440** |

**9-10. клас**

**7. Отг. 45.** Аритметичната прогресия е $\div\ 2;\ \ 4;\ \ 6;\ \ldots;\ \ 2k;\ \ldots$

$$\text{Записваме равенствата}\ \left|\begin{array}{l} a_2-a_1=2\\ a_3-a_2=4\\ a_4-a_3=6\\ \ldots\ldots\\ a_n-a_{n-1}=2(n-1)\end{array}\right.$$

и събираме почленно: $a_n-a_1=2+4+\ldots+2(n-1)=\dfrac{2+2(n-1)}{2}(n-1)$. Оттук $a_n=n^2-n+1$. Тогава $|a_n-2023|=|n^2-n-2022|$. Разглеждаме израза $|x^2-x-2022|$. Най-малката му стойност е равна на 0, откъдето $x^2-x-2022=0$. Единственият положителен корен на полученото квадратно уравнение е $x=\dfrac{1+\sqrt{8089}}{2}$. Тъй като $7921<8089<8100$, като $89^2=7921$ и $90^2=8100$, то $89<\sqrt{8089}<90$ и $\dfrac{1+89}{2}<\dfrac{1+\sqrt{8089}}{2}<\dfrac{1+90}{2}$. Получаваме, че $45<x<45,5<46$. Връщаме се към естественото число *n*. От направените разглеждания следва, че трябва да сравним стойностите на израза $|n^2-n-2022|$ при $n=45$ и $n=46$. Тъй като $|45^2-45-2022|=42$ и $|46^2-44-2022|=50$, заключаваме, че отговорът на задачата е $n=45$.

*Оценяване*. Намиране на общия член на редицата се оценява с **4 точки**. За определяне на стойностите $n=45$ и $n=46$, които водят до решение на задачата, се присъждат **4 точки**. Намирането на верния отговор $n=45$ се оценява с **2 точки**.

| Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 | Задача 4 | Задача 5 | Задача 6 | Задача 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | **D** | **D** | **C** | **D** | **40** | **45** |

**11-12. клас**

**7. Отг. 16.** Търсим числа от вида $M=\overline{ab5}=100a+10b+5$. По условие $k=\dfrac{100a+10b+5}{a+b+5}$ е естествено число. Имаме $k=\dfrac{100a+100b+500-90b-495}{a+b+5}=100-\dfrac{9.5(2b+11)}{a+b+5}$ и $m=9.5(2b+11)$ се дели на $n=a+b+5$. Задачата може да се реши с използване на ограничения, но по-долу се предлага методът на пълното изчерпване:

| $b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 45.11 | 45.13 | 45.15 | 45.17 | 45.19 | 45.21 | 45.23 | 45.25 | 45.27 | 45.29 |
| $n$ | $a+5$ | $a+6$ | $a+7$ | $a+8$ | $a+9$ | $a+10$ | $a+11$ | $a+12$ | $a+13$ | $a+14$ |
| $a$ | 4; 6 | 3; 9; 7 | 2; 8 | 1; 7; 9 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $M$ | 405<br>605 | 315<br>915<br>715 | 225<br>825 | 135<br>735<br>935 | 645 | 555 | 465 | 375 | 285 | 195 |

Броят на всички Кенгурови числа е 16.

*Оценяване*. Извеждане на условие за Кенгурово число се оценява с **2 точки**. За всяко посочено Кенгурово число се присъждат **0,5 точки**.

| Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 | Задача 4 | Задача 5 | Задача 6 | Задача 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **D** | **D** | **C** | **C** | **B** | $\frac{33}{2}\pi$ | **16** |