Секция “Изток” - СМБ

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ –10.12.2023 г.

8 клас

Времето за решаване на задачите е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 9 има само един правилен отговор. “Друг отговор ” се приема за решение само при отбелязан правилен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки. Неверни решения и задачи без отговор се оценяват с 0 точки.

1. Ако $a=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$, то

А) $a=11\sqrt{3}$ Б) $a=\sqrt{7}+2\sqrt{3}$ В) $a=2+\sqrt{3}$ Г) друг отговор

2. Колко подмножества на множеството {1, 2, 3, 4} съдържат поне едно нечетно число?

А) 4 Б) 6 В) 10 Г) друг отговор

3. Изпъкнал *n*–ъгълник има 20 диагонали. Колко е *n*?

А) 20 Б) 12 В) 8 Г) друг отговор

4. Средноаритметичното на възрастите на 8 души е 15 години. Възрастта на всеки от тях е просто число. Броят на 19-годишните е по-голям от броя на хората във всяка друга възраст. Ако ги наредим в редица по възходящ ред на тяхната възраст, средноаритметичното на двамата в средата на редицата е 11 години. На колко най-много години може да бъде най-възрастният от осемте души?

А) 47 Б) 53 В) 59 Г) друг отговор

5. Точките *A, B* и *C* не лежат на една права и са на разстояния съответно 2 cm, 5 cm и 8 cm от права *t*, която лежи в същата равнина. Точката *D* е четвъртият връх на успоредника *ABCD*. Колко cm е сборът на възможните различни стойности на разстоянието от *D* в сантиметри до *t*?

А) 32 Б) 30 В) 28 Г) друг отговор

6. Най-малката стойност на сбора $a+b+c+d+e$, за която многочлените $x^2\left(14x^2+5c\right)+\left(b^2-1\right)x^3-e-1$ и $x^2\left(14ax^2-1\right)+\left(d-d^2\right)x$ са тъждествено равни, е:

А) –1,2 Б) –0,2 В) 3,2 Г) друг отговор

7. Написани са петнадесет числа $x_1,x_2,\ldots,x_{15}$, като $x_1=1$ и всяко следващо число се получава по формулата $x_k=k+\left(x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}\right)$. Колко прости делители има разликата $\left(x_1+x_2+\ldots+x_{15}\right)-15$?

А) 1 Б) 3 В) 5 Г) друг отговор

8. Нека *P* е точка от страната *AB* на равностранния триъгълник *ABC*. Последователно са построени перпендикулярите PP_1 към *BC*, P_1P_2 към *CA* и P_2P_3 към *AB*. На колко трябва да е равно отношението *AP* : *PB* така, че P_3 да съвпадне с *P*?

А) 1 : 1 Б) 1 : 2 В) 1 : 3 Г) друг отговор

9. Положителните числа a,b,c,d и *e* удовлетворяват равенствата $a+b=c^2$, $b+c=d^2$, $c+d=e^2$, $d+e=a^2$ и $e+a=b^2$. Колко е стойността на дробта $\dfrac{a-bc}{a+de}$?

А) $\dfrac{1}{3}$ Б) 0 В) $-\dfrac{1}{3}$ Г) друг отговор

10. На Северния полюс 2023-те джуджета на Дядо Коледа решили да се разходят в гората, за да си починат преди голямото приготовление за Коледа. Преди да тръгнат Дядо Коледа им дал да си разпределят 1012 кутийки кибрит, 1013 вестника и 1014 пънчета, с условието, че едно джудже може да носи 0 или 1 кутийки кибрит, 0 или 1 вестника, 0 или 1 пънчета. С това условие всяко джудже може да носи най-много три предмета – 1 кутийка кибрит, 1 вестник и 1 пънче. Известно е, че с един комплект кутийка кибрит, вестник и пънче може да се запали огън.

Джуджетата на случаен принцип се разделили на две групи. И двете групи от джуджета се загубили и Дядо Коледа тръгнал да ги търси. Известно е, че джуджетата във всяка една от групите биха се справили с опаковането на подаръците за Коледа. Дядо Коледа може да намери джуджетата от една група само, ако са успели да си запалят огън, тъй като той го вижда от шейната си.

Докажете, че както и да си разпределят всичките 3039 предмета, поне едната група ще може да запали огън и Коледа ще бъде спасена.

1 Г $2-\sqrt{3}$	2 Г – 12	3 В
4 Б	5 А	6 А
7 Б	8 Б	9 В

<u>10. Решение</u>:

1 сл.) Има джудже, което носи пълния комплект предмети - 1 кутийка кибрит, 1 вестник и 1 пънче. Тогава групата, с която е отишло това джудже ще може да запали огън, Дядо Коледа ще може да ги намери и Коледа ще бъде спасена.

2 сл.) Няма джудже, което носи пълния комплект предмети. В такъв случай всяко джудже носи най-много два предмета. (*)

1012 + 1013 = 2025 > 2023, тоест общият брой на кутийките кибрит и вестниците е по-голям от общия брой на джуджетата и от принципа на Дирихле, следва, че има джудже, което носи 1 кутийка кибрит и 1 вестник. Нека това джудже е А. От (*) следва, че А не носи други предмети.

Остават 2023 – 1 = 2022 джуджета, 1011 кутийки кибрит, 1012 вестника и 1014 пънчета.

1011 + 1014 = 2025 > 2022, тоест общият брой на кутийките кибрит и пънчетата е по-голям от общия брой на останалите джуджета и от принципа на Дирихле, следва, че сред тях има джудже, което носи 1 кутийка кибрит и 1 пънче. Нека това джудже е Б. От (*) следва, че Б не носи други предмети.

Остават 2022 – 1 = 2021 джуджета, 1010 кутийки кибрит, 1012 вестника и 1013 пънчета.

1012 + 1013 = 2025 > 2021, тоест общият брой на вестниците и пънчетата е по-голям от общия брой на останалите джуджета и от принципа на Дирихле, следва, че сред тях има джудже, което носи 1 вестник и 1 пънче. Нека това джудже е В. От (*) следва, че В не носи други предмети.

Сега, от принципа на Дирихле, следва, че поне две от джуджетата А, Б и В са в една и съща група (3 > 2). Но всеки две джуджета измежду А, Б и В заедно носят пълен комплект предмети => групата, в която има две джуджета от А, Б и В ще може да запали огън, Дядо коледа ще може да ги намери и Коледа ще бъде спасена.