7 и 8 клас

7. Отг. 5. Тъй като $x \neq 0$ и $y \neq 0$ участват симетрично в уравнението, можем да считаме, че $x \geq y$. Тогава $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$ и $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{x}$. Следователно $x \geq 6$. При $x = 6$ получаваме една двойка решения $(x, y) = (6, 6)$. Нека $x \geq 7$. Имаме $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{7}$ и $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{7} + \frac{1}{y}$. Оттук $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}$ и $y \leq \frac{21}{4}$. Възможностите са $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, $y = 4$ и $y = 5$. С непосредствена проверка установяваме, че само случаят $y = 4$ води до решение. По този начин получаваме двойката $(x, y) = (12, 4)$. Поради симетрията двойката $(x, y) = (4, 12)$ е също решение. Така получихме 3 двойки решения. Да обърнем внимание, че направените разсъждения използват неравенства и следва да отчетем, че умножения с отрицателни числа сменят посоките на неравенствата. Това води до опасността да са изпуснати отрицателни решения. Затова ще подходим по начин, който не използва неравенства. Нека (x, y) е двойка решения. Тогава $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ и следователно $3(x + y) = xy$, което представлява Диофантово уравнение. Тъй като лявата страна с дели на 3, можем без ограничение да предположим, че $x = 3z$ за някое цяло число z. Това позволява да опростим Диофантовото уравнение и да го запишем във вида $3z = y(z - 1)$. Сега последователно даваме цели стойности на z, положителни и отрицателни, $(x, y) = (-6, 2)$ заместваме в уравнението и извършваме проверка. Откриваме още едно решение на задачата, което е единствено. То се получава при $z = -2$, откъдето $(x, y) = (-6, 2)$. Поради симетрията двойката $(x, y) = (2, -6)$ е също решение.

Задачата има 5 двойки решения.

Оценяване. За всяко открито решение се присъждат по (**2 точки**).

ОТГОВОРИ

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7
C	**B**	**D**	**D**	**B**	**7**	**5**