Ключ с верните отговори 10 клас

№ на задача	Отговор	Брой точки
1	Г	4
2	А	4
3	Б	4
4	Б	4
5	А	4
6	В	4
7	Г	4
8	А	4
9	А	4
10	Б	4
11	Г	4
12	Г	4
13	В	4
14	Б	4
15	В	4
16		Общо 20 точки
16А)	Полагаме $x^2 - x = y$. Получаване на $y - \sqrt{3y+13} = 5$ Свеждане до квадратно уравнение $y^2 - 13y + 12 = 0$ и решаване $y_1 = 1$ и $y_2 = 12$ Отхвърляне на $y_1 = 1$ Решаване $x^2 - x = 12.$ и получаване на $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$	1 точка 1 точка 4 точки 1 точка 1 точка
16 Б)	Определяне на допуст. стойности $x \neq -3$ Преобразуване до вида $\dfrac{x^2+10x-11}{(x+3)(x^2-3x+9)} \geq 0$ намиране на $x \in [-11;-3) \cup [1;+\infty)$	2 точки 4 точки 4 точки
16В)	$x = -3$ не е решение на неравенството $x = 4$ е решение е решение	1 точка 1точка
17		Общо 20 точки
17	Получаване на уравнението $3(16+b+c) = \dfrac{4bc}{17}$ Получаване на $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ Получаване на $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$ или $\cos\alpha = -\dfrac{15}{17}$ I случай: $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$ Получаване на $256 = b^2 + c^2 - 2bc.\dfrac{15}{17}$	1 точка 1 точка 1 точка 1 точка

	Съставяне на системата $\left\lvert\begin{array}{l} b+c=\frac{4bc}{51}-16 \\ b^2+c^2-\frac{30bc}{17}=256 \end{array}\right.$	1 точка 5 точки
	Свеждане до еквивалентната система $\left\lvert\begin{array}{l} b+c=64 \\ bc=1020 \end{array}\right.$	3 точки
	Решаване на системата и получаване на $(b,c)=(34;30)$ или $(30;34)$.	
	II случай: $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$	1 точка
	Получаване на системата $\left\lvert\begin{array}{l} b+c=\frac{4bc}{51}-16 \\ b^2+c^2+\frac{30bc}{17}=256 \end{array}\right.$	4 точки
	Свеждане до еквивалентна система $\left\lvert\begin{array}{l} b+c=19 \\ bc=446,25 \end{array}\right.$	2 точки
	Установяване, че системата няма решение.	

Примерно решение на задача 16.

А) Полагаме $x^2-x=y.$ Решаваме ирационално уравнение с неизвестно у

$$y-\sqrt{3y+13}=5, \qquad (1)$$

което се свежда до квадратното уравнение $y^2-13y+12=0$ с корени $y_1=1$ и $y_2=12$.
Непосредствената проверка или допустимите стойности $(y\geq 5)$ показват, че само $y_2=12$ е решение на (1). От

$$x^2-x=12.$$

получаваме $x_1=-3$ и $x_2=4$.

Б) Преобразуваме неравенството до вида $\frac{x^2+10x-11}{(x+3)(x^2-3x+9)}\geq 0$,чиито решения са

$x\in[-11;-3)\cup[1;+\infty)$

В) $x_1=-3$ не решение на неравенството, защото е недопустима стойност. Само $x_2=4$ е решение, тъй като $4\in[1;+\infty)$

С непосредствено заместване с $x_2=4$ в неравенството $\frac{3x-2}{x^2-3x+9}-\frac{2}{x+3}\geq\frac{3x-13}{x^3+27}$ се получава вярното числово неравенство $\frac{44}{91}\geq-\frac{1}{91}$, което потвърждава горния извод.

Примерно решение на задача 17:

Прилагайки формулите за лице на триъгълник $S = p.r$ и $S = \frac{a.b.c}{4R}$ получаваме $3(16+b+c) = \frac{4bc}{17}$.

От синусова теорема намираме $\sin\alpha = \frac{8}{17}$. От $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ получаваме $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ или $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$

I случай: $\cos\alpha = \frac{15}{17}$. От косинусова теорема за страната *a* намираме

$256 = b^2 + c^2 - 2bc.\frac{15}{17}$. За страните на триъгълника b и c получаваме системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} b+c = \frac{4bc}{51} - 16 \\ b^2 + c^2 - \frac{30bc}{17} = 256 \end{array} \right. \qquad (1)$$

От първото уравнение на системата намираме $b^2 + c^2 = \frac{16b^2c^2}{51^2} - \frac{230bc}{51} + 256$ и заместваайки във второто уравнение достигаме до $bc = 1020$. Системата (1) е еквивалентна на системата

$$\left| \begin{array}{l} b+c = 64 \\ bc = 1020 \end{array} \right.$$

от която получаваме $(b,c) = (34;30)$ или $(30;34)$.

II случай. $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$. Аналогичната система на (1) е $\left| \begin{array}{l} b+c = \frac{4bc}{51} - 16 \\ b^2 + c^2 + \frac{30bc}{17} = 256 \end{array} \right.$, която е еквивалентна на

$\left| \begin{array}{l} b+c = 19 \\ bc = 446,25 \end{array} \right.$. Последната система няма реални решения.