**СМБ – секция Русе и ИНФОМАТ – Русе**

**Тренировъчен изпит по математика за VII клас – 18.05.2024 година**

**21.** Дадено е неравенството $\dfrac{(1-x)^2}{3}-2\ge\dfrac{1}{4}(2+x)(x-2)+\dfrac{x^2+4}{12}$.

**А)** Решете неравенството, изобразете решенията му върху числовата ос и ги запишете с интервал.

**Б)** Намерете числата $a=\dfrac{2024}{20^2-24^2}$ и $b=\dfrac{(-3)^5.\pi^0}{(-9)^4\,6^{-2}}$ и проверете дали са решения на даденото неравенство.

**Примерно решение:**

А) $$\frac{(1-x)^2}{3}-2\ge\frac{1}{4}(2+x)(x-2)+\frac{x^2+4}{12}$$

$$\frac{1-2x+x^2}{3}-2\ge\frac{x^2-4}{4}+\frac{x^2+4}{12}\quad\Big|.12$$

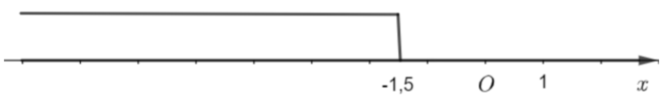
$$4\left(1-2x+x^2\right)-24\ge3\left(x^2-4\right)+x^2+4$$

$$4-8x+4x^2-24\ge3x^2-12+x^2+4$$

$$4x^2-8x-20\ge4x^2-8$$

$$-8x\ge12\quad\Big|.(-1)$$

$$8x\le-12\quad\Big|:8$$




$$x\le-\frac{12}{8}$$

$$x\le-\frac{3}{2}$$

$$x\in(-\infty;-1,5]$$

Б) $$a=\frac{2024}{20^2-24^2}=\frac{2024}{(20-24).(20+24)}=\frac{2024}{-4.44}=-\frac{253}{22}=-\frac{23}{2}=-11,5$$

$-11,5\in(-\infty;-1,5]\Rightarrow$ $a$ **е** решение на неравенството.

$$b=\frac{(-3)^5.\pi^0}{(-9)^4\,6^{-2}}=\frac{-3^5.1.6^2}{9^4}=-\frac{3^5.3^2.2^2}{3^8}=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}$$

$-1\frac{1}{3}\notin(-\infty;-1,5]\Rightarrow$ $b$ **не е** решение на неравенството.

**Критерии за оценяване:**

| | |
|---|---|
| Тъждествени преобразувания за двете формули | 2 т. |
| Привеждане под общ знаменател | 1 т. |
| Тъждествени преобразувания до нормален вид на неравенство | 1 т. |
| Записване на решенията на неравенството по 3 начина | 2 т. |
| Намиране на числото $a$ и извод, че е решение | 2 т. |
| Намиране на числото $b$ и извод, че не е решение | 2 т. |

**Общо 10 точки**

**22.** За награди в едно математическо състезание трябва да се купят раници, книги и настолни игри. Една раница струва 24 лв., една книга струва 15 лв., а една игра струва 13 лв. Броят на книгите е с 40% повече от броя на раниците, а броя на раниците са два пъти по малко от броя на настолните игри. Колко най-много раници могат да се купят, ако общата сума на наградите не трябва да надвишава 450 лева.

**Примерно решение:**

Нека означим броя на раниците с $x \left(x \in \mathbb{N}\right)$.

| Награди | Брой | Цена за 1 брой | Обща цена в лева |
|---|---|---|---|
| Раници | $x$ | 24 лв. | $24x$ |
| Книги | $x+40\%x=1,4x$ | 15 лв. | $15.1,4x=21x$ |
| Настолни игри | $2x$ | 13 лв. | $13.2x=26x$ |

$24x+21x+26x \le 450$

$71x \le 450$

$x \le \dfrac{450}{71}$

$x \le 6\dfrac{24}{71}$

Най-голямото естествено число, което е решение на неравенството е 6.
Но броят на книгите и броят на игрите трябва да бъдат естествени числа.
При $x=6$ броят на книгите $1,4.6$ не е естествено число.
При $x=5$ броят на книгите е $1,4.5=7$ и броят на игрите е 10.
Отговор – Могат да се купят най-много 5 раници.

**Критерии за оценяване:**

| | |
|---|---|
| Въвеждане на неизвестно, естествено число | 0,5 т. |
| Изразяване на броя на книгите | 2 т. |
| Изразяване на броя на игрите | 1 т. |
| Изразяване на общата цена на раници, книги и игри | 1,5 т. |
| Съставяне на неравенство | 1 т. |
| Решаване на неравенството | 1 т. |
| Намиране на най-голямото естествено число $x=6$ | 1 т. |
| Съобразяване, че $1,4.6$ не е естествено число | 1 т. |
| Отговор, че $x=5$ е решение на задачата | 1 т. |

**Общо 10 точки**

**23.** Върху правоъгълната координатна система *Oxy*, на листа за отговори $\left(1\,\text{м.ед.}=1\,\text{cm}\right)$, изобразете точките $A\left(-5;-2\right)$, $C\left(8;2\right)$ и $D\left(-2;2\right)$. Постройте и определете координатите на точка *B*, лежаща в IV квадрант така, че четириъгълникът с върхове точките *A*, *B*, *C* и *D* да бъде успоредник.

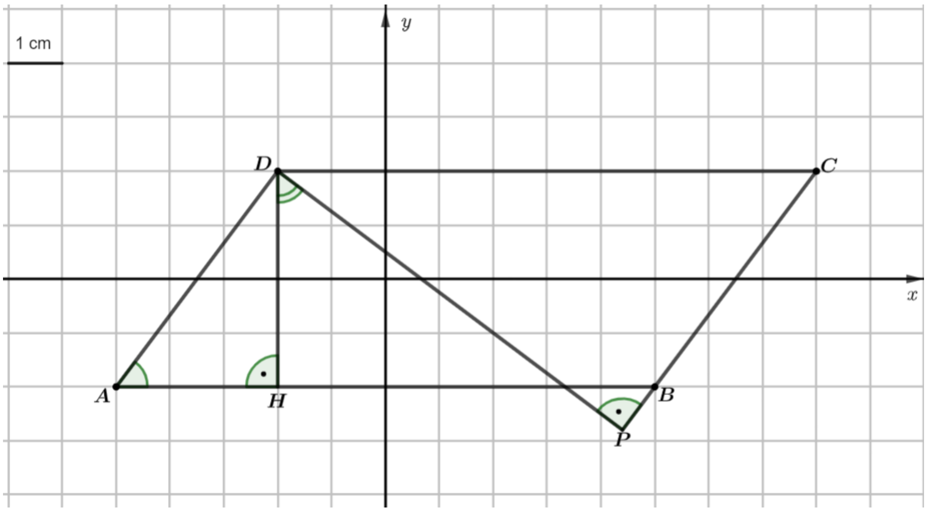
А) Постройте височините на успоредника *DH* и *DP*, където точки *H* и *P* лежат съответно на правите *AB* и *BC*;

Б) Намерете обиколката, лицето на *ABCD* и дължината на височината *DP*;

В) Ако $\measuredangle BAD=\alpha$, изразете чрез $\alpha$ мярката на $\measuredangle HDP$;

Г) Ако ъглополовящата на $\measuredangle ABC$ пресича страната *CD* в точка *L*, то намерете дължината на отсечката *DL* и мярката на $\measuredangle ALB$.

**Примерно решение:**




$y_C = y_D = 2 \Rightarrow CD \parallel Ox \parallel AB$

$CD = 10\,\text{cm} = AB$

$B$ лежи в IV квадрант $\Rightarrow B(5;-2)$.

Построяване на височината $DH \perp AB,\ \text{AB} \parallel Oy \quad \Rightarrow H(-2;-2)$

$AH = 3$ cm и $DH = 4$ cm.

$S_{ABCD} = AB.DH = 10.4 = 40\ \text{cm}^2$.

Намиране на дължината на $AD$ от питагорова теорема за правоъгълния $\triangle AHD$.

$AH^2 + DH^2 = AD^2 \quad 3^2 + 4^2 = AD^2 \quad 25 = AD^2 \quad AD = 5$ cm.

Намиране на обиколката $P_{ABCD} = 2AB + 2AD = 2.10 + 2.5 = 30$ cm.

Построяване на перпендикуляр $DP$ към правата $BC$, точка $P$ е външна за отсечката $BC$.

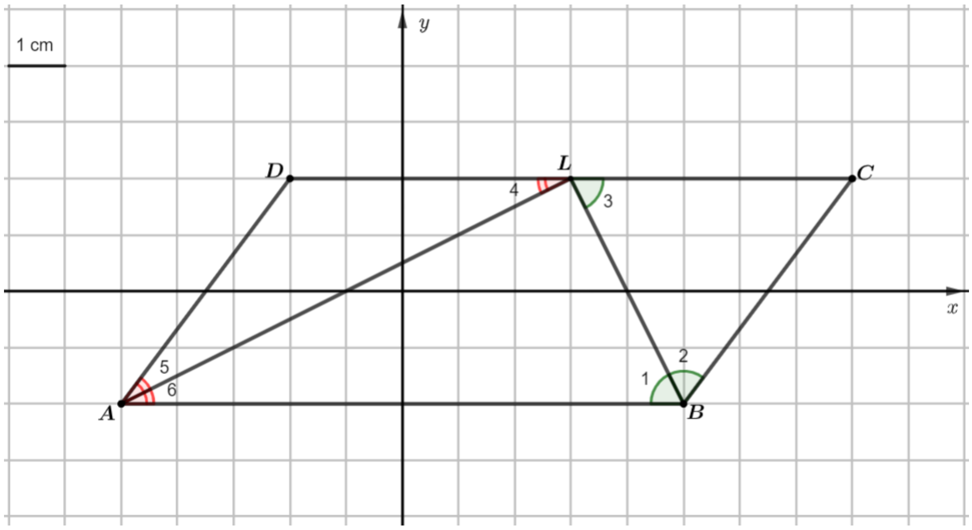
Намиране на височината $DP$ от формулата за лице

$S_{ABCD} = BC.DP \qquad 40 = 5.DP \quad \Rightarrow \quad DP = 8$ cm.

$ABCD$ е успоредник $\Rightarrow \measuredangle BAD = \measuredangle BCD = \alpha$ и $\measuredangle BAD + \measuredangle ADC = 180°$.

Изразяване на $\measuredangle ADH = \measuredangle PDC = 90° - \alpha$.

Намиране на $\measuredangle HDP = 180° - \alpha - 2(90° - \alpha) = \alpha$.




$BL$ ъглополовяща $\Rightarrow \quad \measuredangle 1 = \measuredangle 2$

$AB \parallel CD \quad \Rightarrow \quad \measuredangle 1 = \measuredangle 3$ (кръстни)

$\Rightarrow \quad \measuredangle 2 = \measuredangle 3 \Rightarrow \ BC = LC = 5\,\text{cm}$.

$DL = CD - CL = 10 - 5 = 5$ cm.

$AD = DL = 5\text{ cm} \Rightarrow \quad \measuredangle 4 = \measuredangle 5$

$AB \parallel CD \quad \Rightarrow \quad \measuredangle 4 = \measuredangle 6$ (кръстни)

$\Rightarrow \quad \measuredangle 5 = \measuredangle 6 \quad \Rightarrow \quad AL$ е ъглополовяща на $\measuredangle BAD$.

$AD \parallel BC \quad \Rightarrow \quad 2.\measuredangle 6 + 2.\measuredangle 1 = 180^\circ$

$\measuredangle 6 + \measuredangle 1 = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \measuredangle ALB = 90^\circ$.

**Критерии за оценяване:**

| | |
|---|---|
| Правилен чертеж с точки *A*, *C* и *D*. | 2 т. |
| Построяване и намиране координатите на точка $B(5;-2)$. | 1 т. |
| Построяване на височините на успоредника *DH* и *DP* (т.*P* е външна) | 2 т. |
| Намиране на *AD* = 5 cm | 2 т. |
| Намиране на обиколката на успоредника | 1 т. |
| Намиране на лицето на успоредника | 1 т. |
| Намиране на височината *DP* | 1 т. |
| Изразяване на $\measuredangle HDP = \alpha$ | 2 т. |
| Намиране на *DL* = 5 cm или *L* е среда на *AB* | 1 т. |
| Доказване, че $\measuredangle ALB = 90^\circ$. | 2 т. |
| | **Общо 15 точки** |

***Забележка:*** *Всяко вярно решение на отделен етап от задача, различно от предложеното, се оценява със съответния брой точки.*



**Желаем Ви успех на 21 юни 2024 година!**